

4. Inverzní funkce

pr. VOLNÝ PÁD ($g = 10 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ tíhové zrychlení)

- dráha v závislosti na době

$$f: s = \frac{1}{2} g t^2$$

- doba v závislosti na dráze

$$g: t = \sqrt{\frac{2s}{g}}$$

t	1	2	3
s	5	20	45

$$\mathcal{D}(f) = \{1, 2, 3\} = \mathcal{H}(g)$$

$$\mathcal{H}(f) = \{5, 20, 45\} = \mathcal{D}(g)$$

s	5	20	45
t	1	2	3

FUNKCE g je INVERZNÍ FUNKCÍ k fci f
(a naopak)

$$\left[\begin{array}{l} s = \frac{1}{2} g t^2 \\ 2s = g t^2 \\ t^2 = \frac{2s}{g} \\ |t| = \sqrt{\frac{2s}{g}} \\ \text{[all } s \in \langle 0, +\infty \rangle] \\ \Rightarrow |t| = t \\ t = \sqrt{\frac{2s}{g}} \end{array} \right]$$

DEF.

INVERZNÍ FUNKCÍ k funkci f , která je PROSTÁ a celým svým definičním oborem $\mathcal{D}(f)$ je funkce f^{-1} , pro kterou platí:

1. $\mathcal{D}(f^{-1}) = \mathcal{H}(f)$

2. $\forall y \in \mathcal{H}(f)$ je příslušný bod $x \in \mathcal{D}(f)$,
pro který $y = f(x)$

Obor hodnot $\mathcal{H}(f^{-1}) = \mathcal{D}(f)$

Příklady

① je dána fci $f: y = 3x - 2$, $\mathcal{D}(f) = \langle -1, 2 \rangle$. Pokud existuje, uveď inverzní funkci f^{-1} .

1. f LINEÁRNÍ, rostoucí $\Rightarrow$ JE PROSTÁ $\Rightarrow$ INVERZNÍ FCE EXISTUJE

2. $\mathcal{D}(f^{-1}) = \mathcal{H}(f) = \langle -5, 4 \rangle$ $\left[\begin{array}{l} \mathcal{H}(f) = \langle f(-1), f(2) \rangle = \langle -5, 4 \rangle \\ y(-1) = 3 \cdot (-1) - 2 = -5 \\ y(2) = 3 \cdot 2 - 2 = 4 \end{array} \right]$

3. určení předpisu f^{-1} :

$$\forall y \in \mathcal{H}(f) \exists! x \in \mathcal{D}(f): y = 3x - 2$$

$$f^{-1}: x = 3y - 2 \quad \left[\begin{array}{l} \text{pro } f^{-1} \text{ nahradíme} \\ x, y \text{ a vyj. } y \end{array} \right]$$

$$3y = x + 2$$

$$f^{-1}: y = \frac{x}{3} + \frac{2}{3} \quad \mathcal{D}(f^{-1}) = \langle -5, 4 \rangle = \mathcal{H}(f)$$

je line., rost. a prostá $\mathcal{H}(f^{-1}) = \mathcal{D}(f) = \langle -1, 2 \rangle$

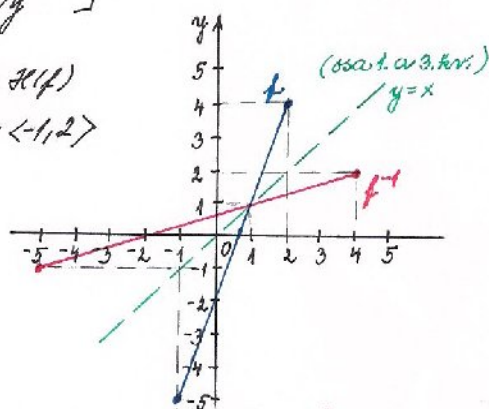
GRAFY

$$f: y = 3x - 2 \quad \mathcal{D}(f) = \langle -1, 2 \rangle$$

x	-1	2
y	-5	4

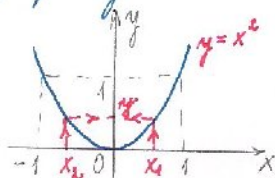
$$f^{-1}: y = \frac{x}{3} + \frac{2}{3} \quad \mathcal{D}(f^{-1}) = \langle -5, 4 \rangle$$

x	-5	4
y	-1	2



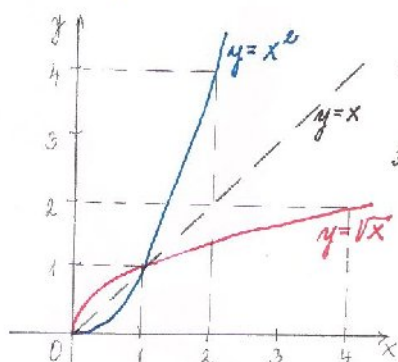
GRAFY f, f^{-1} jsou souměrné podle přímky $y = x$ (osa 1. a 3. kvadrantu)

- ② Ujistiť, kda existuje inverzná funkcia f^{-1} k funkci f , f^{-1} -li.
 a) $f: y = x^2$ a $D = \mathbb{R}$



fce f NENÍ PROSTÁ $\Rightarrow$ NEEXISTUJE
 INVERZNÍ FCE f^{-1} k fce f
 (každá $x \in D$ (mimo $x=0$) má
 dvě $y \in \mathbb{R}$)

- b) $f: y = x^2$ a $D(f) = \mathbb{R}_0^+ = \langle 0, +\infty \rangle$



1. f je PROSTÁ $\Rightarrow f^{-1}$ EXISTUJE

2. $D(f^{-1}) = \mathcal{H}(f) = \langle 0, +\infty \rangle = \mathbb{R}_0^+$

$\mathcal{H}(f^{-1}) = D(f) = \langle 0, +\infty \rangle = \mathbb{R}_0^+$

3. náčrt přípisu f^{-1} :

$f: y = x^2$

$f^{-1}: x = y^2$

$\sqrt{x} = |y|$ ALE $y \in \langle 0, +\infty \rangle \Rightarrow$
 $|y| = y$

$f^{-1}: y = \sqrt{x}$ $\leftarrow D(f^{-1}) = \langle 0, +\infty \rangle$

- c) $f: y = x^2 - 1$ $D(f) = \langle 0, 6 \rangle$

1. f PROSTÁ, kosh. $\Rightarrow f^{-1}$ EXIS.

2. $\mathcal{H}(f) = \langle -1, 35 \rangle$

$\begin{bmatrix} y(0) = 0^2 - 1 = -1 \\ y(6) = 6^2 - 1 = 35 \end{bmatrix}$

3. náčrt přípisu

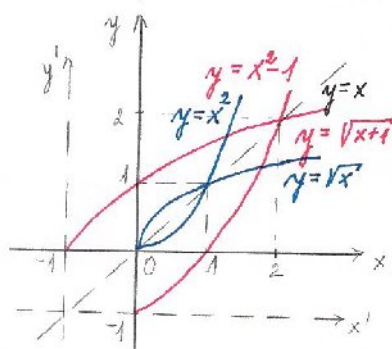
$f: y = x^2 - 1$

$f^{-1}: x = y^2 - 1$

$y^2 = x + 1$

$|y| = \sqrt{x+1}$ $y \in \mathcal{H}(f^{-1}) =$
 $= D(f) = \langle 0, 6 \rangle$

$f^{-1}: y = \sqrt{x+1}$ $\leftarrow \Rightarrow y > 0$



- d) $f: y = \frac{x+1}{x-1}$ $D(f) = \mathbb{R} - \{1\}$

1. lin. lom. fce - PROSTÁ $\Rightarrow f^{-1}$ EXIS.

$f: y = \frac{x+1}{x-1} = \frac{x-1+2}{x-1}$

$y = 1 + \frac{2}{x-1}$

$f: y = \frac{2}{x-1} + 1$ $\left[\begin{matrix} 0' [1,1] \\ f^{-1}: y = \frac{x}{2} \end{matrix} \right]$

2. $\mathcal{H}(f) = \mathbb{R} - \{1\} = D(f^{-1})$

3. náčrt přípisu

$f: y = \frac{x+1}{x-1}$

$f^{-1}: x = \frac{y+1}{y-1}$

$x(y-1) = y+1$

$xy - x = y+1$

$xy - y = x+1$

$y(x-1) = x+1$

$y = \frac{x+1}{x-1}$

$D(f^{-1}) = \mathcal{H}(f) = \mathbb{R} - \{1\}$

$\mathcal{H}(f^{-1}) = D(f) = \mathbb{R} - \{1\}$

